

No. of Printed Pages : 11

Roll No. 1402081066

2K5-AS-2

Nov./Dec. 2014

APPLIED MATHEMATICS-I

Time Allowed : 3 Hours

Max. Marks : 100

- Note**
1. 'Part—A' may be attempted in first 6 pages of Answer-sheet.
 2. 'Part-B' in rest of sheets of Answer-sheet.
 3. The question paper consists of two parts, namely, Part—A & Part—B.
 4. A candidate has to attempt both parts.
 5. Part—A consists of two questions and Part—B consists of 5 questions.
 6. Answer may be given in Hindi or English language.

[Part—A]

<https://diplomate.greybits.in/>

1. Answer any ten questions : $2 \times 10 = 20$

(1) If matrix $A = [1 \ 2 \ 3]$,

write AA^T .

(2) If A is a square matrix of order 3 with

$|A| = 4$, then write the value of $|-A|$.

(3) If

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

be such that $A^{-1} = kA$, then find k .

- (4) Write the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^e}{x}$
- (5) If $x > 0$, find $\frac{d}{dx} (e^{|x|})$
- (6) Find the value of $\frac{d}{dx} (\log|x|)$
- (7) If the area of the triangle formed by the line $a^2x + 4y = 12$ with the coordinate axes is 2 square units, find the value of a .
- (8) Find the equation of the circle concentric to the circle $x^2 + y^2 = 9$ and area is 4 times the area of the given circle.
- (9) If $3x - 2y + k = 0$ is a focal chord of the parabola $x^2 = 8y$, find the value of k .
- (10) If the position vector \vec{a} of two point $(5, n)$ is such that $|\vec{a}| = 13$, find the values of n .
- (11) If the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$ are parallel, find the value of p .
- (12) Find the eccentricity of the ellipse $16(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 144$.

- (13) Find the coordinates of foci of the hyperbola $16x^2 - 9y^2 = -144$
- (14) Find the circumference of the circle $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0$
2. Attempt any five questions : $4 \times 5 = 20$
- (1) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, find the determinant of $A^2 - 2A$.
- (2) Without expanding, prove that $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 1+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 1+6p+3q \end{vmatrix} = 1$
- (3) If $y = \log \left\{ x + \sqrt{x^2 + a^2} \right\}$ prove that $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1$
- (4) If $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^n - 3^n}{x - 3} = 405$ find n .

(4)

1100

- (5) Find the equation of the straight line which passes through the intersection of the lines $x - y - 1 = 0$ and $2x - 3y + 1 = 0$ and parallel to x-axis.

- (6) Find the slopes of the lines which make an angle of 45° with the line $3x - y + 5 = 0$

- (7) Find the equation of the hyperbola, referred to its principal axes as axes of coordinates, having vertices at $(\pm 5, 0)$ and foci at $(\pm 7, 0)$.

- (8) The focal distance of a point on the parabola $y^2 = 12x$ is 4. Find the coordinates of this point.

[Part-B]

Note : Answer three questions.

$20 \times 3 = 60$

3. (a) Prove that every square matrix can be uniquely expressed as the sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix.

(b) Prove that :

$$\begin{vmatrix} x+y & x & x \\ 5x+4y & 4x & 2x \\ 10x+8y & 8x & 3x \end{vmatrix} = x^3$$

by using properties of determinants.

1100

4.

- (a) Express the vector $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ in the form $\vec{\beta} = \beta_1\hat{i} + \beta_2\hat{j}$, where β_1 is parallel to $\vec{\alpha} = 3\hat{i} - \hat{j}$ and β_2 is perpendicular to $\vec{\alpha}$.

- (b) Forces $2\hat{i} + 7\hat{j}$, $2\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$, $-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ act at a point P whose position vector is

$4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$. Find the moment of the resultant of three forces acting at P about the point Q whose position vector is

$6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$.

5. (a) Differentiate $\sin(x^2 + 1)$ from first principles.

(b) If $x^2 + y^2 = 2$ find $\frac{dy}{dx}$

Handwritten notes:
 $\log x^2 = 2 \log x$
 $\log m^2 = 2 \log m$
 $\log m^2 = \log m^2$
 $\log m^2 = 2 \log m$

6.

(a)

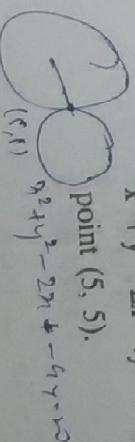
If $y = \frac{\sqrt{2a-x} + \sqrt{2a+x}}{\sqrt{a+x}}$ show that $\frac{dy}{dx} = \frac{-2a}{x^2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{\sqrt{a-x}\sqrt{a+x}} \right\}$.

Handwritten notes:
 $\frac{1}{a^n} (a^n)' = \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{x} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right)$
 $\frac{da}{dx} = \frac{1}{x} \left(\frac{dy}{dx} \right)$

- (b) Find the equation of the circle whose radius is 5 and which touches the circle

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ externally at the

point (5, 5).



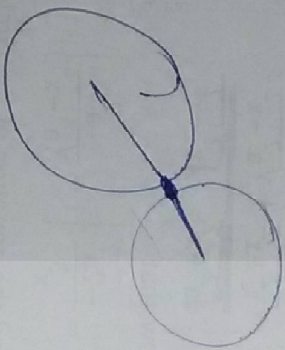
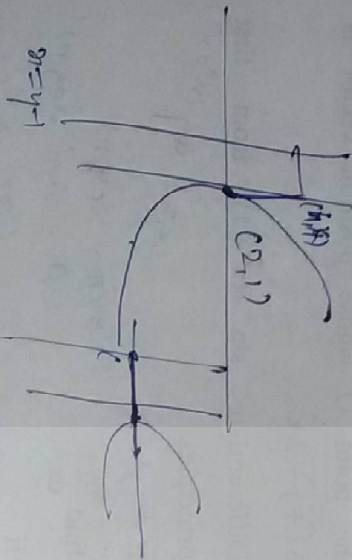
7.

(a) Find the equation of the parabola whose vertex is at $(2, 1)$ and the directrix is $x = y - 1$.

(b) Show that the equation

$$x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$$

is the equation of an ellipse. Find its eccentricity, vertices, foci, directrices, the length of the latus rectum and its equation.



$$4 + 1 - 20 - 2 + 4 + 9 = 20$$

[हिन्दी रूपांतरण]

नोट- 1. 'भाग-अ' के उत्तर उत्तर-पुस्तिका के पहले 6 पृष्ठों पर ही दें।

- 'भाग-ब' के उत्तर उत्तर पुस्तिका के बाकी पृष्ठों पर दें।
- परीक्षार्थों को दोनों ही भाग करने हैं।
- इस प्रश्न-पत्र के 2 भाग हैं भाग (अ) एवं भाग (ब)
- भाग (अ) में 2 प्रश्न एवं भाग (ब) में 5 प्रश्न हैं।

[भाग-आ]

1.

किन्हीं दस प्रश्नों को हल कीजिये—

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तो AA^T को ज्ञात कीजिये।

(2) कोटि 3 के वर्ग मैट्रिक्स के लिये $|A| = 4$, तो $|-A|$ का मान लिखिये।

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $A^{-1} = kA$, तो k को ज्ञात कीजिये।

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x e^x}{x}$ को ज्ञात कीजिये।

(5) $x > 0$, तो $\frac{d}{dx} (e^{|x|})$ को ज्ञात कीजिये।

(6) $\frac{d}{dx} (\log |x|)$ को ज्ञात कीजिये।

$$4 + 1 - 20 - 2 + 4 + 9 = 20$$

- (7) निर्देशांक अक्षों तथा रेखा $ax^2 + 4y = 12$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल 2 वर्ग इकाई है। a का मान ज्ञात कीजिये।
- (8) वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ के साथ समकेंद्र तथा इसके क्षेत्रफल से 4 गुना क्षेत्रफल के वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये।
- (9) फवलय $x^2 = 8y$ की फोकल जीवा $3x - 2y + k = 0$ है, तो k का मान ज्ञात कीजिये।
- (10) बिन्दु $(5, m)$ को स्थिति सदिश \vec{a} के लिये $|\vec{a}| = B$ है, तो m का मान ज्ञात कीजिये।
- (11) सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$ समांतर है। p का मान ज्ञात कीजिये।
- (12) दीर्घवृत्त $16(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 144$, की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिये।
- (13) अतिपरवलय $16x^2 - 9y^2 = -144$ की नाभियों के निर्देशांक ज्ञात कीजिये।
- (14) वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0$ की परिधि ज्ञात कीजिये।
2. किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिये—
- (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,
तो निर्धारक $A^2 - 2A$ को ज्ञात कीजिये।

- (2) प्रसर किये बिना सिद्ध कीजिये—
- $$\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 1+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 1+6p+3q \end{vmatrix} = 1$$
- (3) $y = \log \{x + \sqrt{a^2 + x^2}\}$ है,
तो सिद्ध कीजिये
- $$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1$$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^n - 3^n}{x - 3} = 405$ में n को ज्ञात कीजिये।
- (5) रेखाओं $x - y = 0$ तथा $2x - 3y + 1 = 0$ के कटान-बिन्दु से जाने वाली तथा x -अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।
- (6) रेखा $3x - y - 5 = 0$ से 45° के कोण पर अवनत रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिये।
- (7) निर्देशांक अक्षों को मुख्य अक्ष लेकर अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिये। इसकी नाभियाँ $(\pm 7, 0)$ तथा शीर्ष $(\pm 5, 0)$ हैं।
- (8) $y^2 = 12x$ पर एक बिन्दु की फोकल-दूरी 4 है। बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिये।
[भाग-ब]]
3. नोट—किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर लिखिये।
- (क) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स विशेष रूप से सममित मैट्रिक्स तथा विषम-सममित मैट्रिक्स के योग में व्यक्त कर सकते हैं।

(ख) निधारकों के गुणों का प्रयोग कर सिद्ध कीजिये—

$$\begin{vmatrix} x+y & x & x \\ 5x+4y & 4x & 2x \\ 10x+8y & 8x & 3x \end{vmatrix} = x^3$$

4.

(क) $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ को $\vec{\beta} = \beta_1 + \beta_2$ के रूप में व्यक्त कीजिये, जबकि $\beta_1, \alpha = 3\hat{i} - \hat{j}$ के समान्तर तथा β_2, α के लम्बवत् है।

(ख) स्थिति सदिश $4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ के बिन्दु P पर तीन बल $3\hat{i} + 7\hat{j}, 2\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$ तथा $-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ कार्यरत हैं। P पर इन बलों के परिणामी बल का अधूर्ण, स्थिति सदिश $6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ के बिन्दु पर Q पर शान्त कीजिये।

5.

(क) $(x^2 + 1)$

का प्रथम सिद्धान्त अनुसार अवकलन कीजिये।

(ख) $x^y + y^x = 2$

तो $\frac{dy}{dx}$ शान्त कीजिये।

6.

(क) $y = \frac{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}}$

तो सिद्ध कीजिये

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^2}{x^3} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}} \right\}$$

(ख) वृत्त

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

को बिन्दु (5, 5) से बाह्य स्पर्श करने वाले तथा बिन्दु 5 के वृत्त का समीकरण शान्त कीजिये।

7.

(क) (2, 1) शीर्ष तथा $x = y - 1$ नियता के परवलय का

समीकरण शान्त कीजिये।

(ख) सिद्ध कीजिये कि

$$x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$$

एक दीर्घवृत्त है। इसकी उत्केन्द्रता, शीर्षों, नाभियों, नियताओं तथा नाभिलम्बों के समीकरण व लम्बाइयाँ शान्त कीजिये।

Diplomate

<https://diplomate.greaybits.in/>